Cette expression tend vers 2 lorsque x tend vers $+\infty$.

$$* f(x) - 2x = -x + \sqrt{1+x^2} = \frac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

qui tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$, donc la droite (D) : $y = 2x$ est une asymptote à (C_f) au voisinage de $+\infty$.

5)Pour tout x positif ou nul on a : $f'(x) \leq 2$ et f est croissante sur IR donc pour tout $x \geq 0$ on a : $f(x) - f(0) \leq 2x$ (Théorème des inégalités de l'accroissement fini).Par suite $f(x) \leq 2x + 1$.

*on a :$x^2 + 1 \geq x^2$ donc pour $x \geq 0$;$\sqrt{1+x^2} \geq x$ don $f(x) \geq 2x$.

Conclusion : $2x \leq f(x) \leq 2x + 1$.

Exercice 4

1-Monotonie de u et v

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!}$ donc u est croissante.

$$* v_{n+1} - v_n = (u_{n+1} - u_n) + \left(\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = 2\left(\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}\right) < 0\right.$$

Donc v est décroissante.

2-Il est évident que $u_n < v_n$ pour tout entier naturel n.

*Si p = q évident (la définition de v_n)

*Si p < q on a u est croissante ; v est décroissante

Donc : $u_p < u_q < v_q$.

*Si p> q alors :$u_p < v_p < v_q$.

Conclusion : Pour tout entiers naturels p et q on : $u_p < v_q$.

3-On a : $u_0 < u_n < v_n < v_0$; les suites u et v sont monotone bornées donc elles sont convergentes. Par définition de vn

On a : $v_n - u_n = \frac{1}{n!}$ est une expression qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn